ایستگاه دوم:
چند معمای زیبا از جزیرهٔ پرسشگران!

یکی از دوستان من چندی پیش برای سیاحت و گردش به جزیرهٔ پرسشگران رفته بود! همانجا که بود با من تماس گرفت و از زیبایی‌های آنجا برایم گفت و اضافه کرد: حتماً باید بیایی و اینجا را ببینی. به جز جاذبه‌های گردشگری مردم عجیبی هم دارد! آن‌ها فقط سؤال می‌کنند و به‌جز این چیز دیگری نمی‌گویند، و به همین ترتیب هم با هم ارتباط برقرار می‌کنند! عجیب آنکه آن‌ها دو نوع مختلف هم هستند: نوع A و نوع B.

وقتی از دوستم خواستم در مورد این دو نوع توضیح دهد، گفت: آن‌ها که نوع A هستند، فقط سؤال‌هایی می‌پرسند که پاسخ آن بله باشد و آن‌ها که نوع B هستند، فقط سؤال‌هایی می‌پرسند که پاسخ آن خیر باشد. مثلاً اگر کسی از شما بپرسد: «آیا آب مایع است؟» می‌فهمید که از نوع A است. اما اگر کسی از شما بپرسد: «آیا ۲ به اضافهٔ ۲ می‌شود ۵؟» و یا بپرسد: «آیا ۲ به اضافهٔ ۲ می‌شود ۶؟» می‌فهمید که او از نوع B است، زیرا پاسخ هر دوی این سؤالات خیر است.

گفتم: عجب! جالب است، باید خودم بیایم و ببینم!

معمای اول

دوستم گفت: ببین همین الان یک نفر آمده و به من می‌گوید: «آیا من از نوع B هستم؟» و من مانده‌ام چه بگویم! به نظر تو او از چه نوعی است؟

حالا خوانندهٔ عزیز، نظر شما چیست؟ او از چه نوعی است؟!

معمای دوم

دوستم بعد از توضیح من، حرفش را تصحیح کرد و گفت: بله ببخشید، او از من پرسید: «آیا من از نوع A هستم؟» حالا چه می‌گویی؟ شما بگویید او از چه نوعی است؟

***

بعد از خداحافظی با دوستم، هیجان‌زده بودم و می‌خواستم این مردم عجیب و غریب را ببینم. پس فوراً اقدام کردم و با اولین تور مسافرتی خودم را به این جزیرهٔ عجیب رساندم.

معمای سوم

به محض ورود به جزیره، یک زوج جوان را ملاحظه کردم که در حال قدم زدن بودند. آقا رو به من کرد و گفت: «آیا من و همسرم هر دو از نوع B هستیم؟»

شما بگویید، او و همسرش هر کدام از چه نوعی هستند؟

معمای چهارم

کمی بعد به دو برادر برخوردم. یکی از آن‌ها از دیگری پرسید: «آیا درست است که لااقل یکی از ما از نوع B است؟»

شما بگویید: این دو برادر هر یک از چه نوعی هستند؟

معمای پنجم

بعد از آن یک زوج دیگر را دیدم. آقا رو به همسرش گفت: «آیا ما از دو نوع متفاوت هستیم؟»

دربارهٔ نوع این دو نفر چه می‌توانید بگویید؟

معمای ششم

بعد از آن شهروند دیگری را ملاقات کردم. او از من پرسید: «آیا من از نوعی هستم که می‌تواند بپرسد: "آیا من از نوع B هستم؟"» این شهروند از چه نوعی بود؟

قضیهٔ تقسیم

محمود داورزنی
کارشناس ارشد ریاضی و
دبیر ریاضی شهر ری

اشاره

قضیهٔ تقسیم به شکل $a=bq+r$ که در آن $a,b,q\in Z$ و $r\in N$ و $۰\leq r<|b|$، در بسیاری از مسائل دیده می‌شود و تقریباً برای حل تمامی این مسائل باید دربارهٔ پارامترهای این قضیه شناخت کافی داشت. در این مقاله ابتدا این قضیه را اثبات می‌کنیم و سپس چند مسئله برای درک بیشتر آورده می‌شود.

از تقسیم یک عدد طبیعی بر عدد طبیعی دیگر و تعیین خارج‌قسمت و باقی‌مانده، هر دانش‌آموزی در محاسبات خود بارها استفاده می‌کند. البته می‌توانیم یک عدد صحیح منفی را نیز بر یک عدد ناصفر دیگر تقسیم کنیم. قضیهٔ مشهور زیر که به قضیه یا الگوریتم تقسیم معروف است، این ادعا را ثابت می‌کند.

قضیهٔ تقسیم: فرض کنید a و b دو عدد صحیح باشند و $b\neq ۰$. در این صورت اعداد صحیح و یکتای r و q وجود دارند، به‌طوری که: $a=bq+r$ ؛ $۰\leq r<|b|$.

اثبات: دنبالهٔ زیر از اعداد صحیح را در نظر بگیرید:

$$\dots, -۲|b|, -|b|, ۰, |b|, ۲|b|, \dots$$

عدد صحیح a بین دو عضو متوالی این دنباله قرار دارد. به عبارت دیگر، عدد صحیح q وجود دارد به‌طوری که:

$$q|b|\leq a<(q+۱)|b| \quad (۱)$$

قرار دهید: $r=a-q|b|$، بنابراین طبق نامساوی (۱): $۰\leq r<|b|$. اگر: $b>۰$، سپس: $a=bq+r$ و $۰\leq r<b$. و اگر $b<۰$، آن‌گاه: $a=b(-q)+r$ و $۰\leq r<|b|$. بنابراین وجود r و q اثبات می‌شود.

برای اثبات یکتایی r و q، فرض کنید r' و q' دو عدد صحیح باشند که:

$$a=bq'+r' \; ; \; ۰\leq r'<|b|$$

از مقایسهٔ این تساوی با تساوی بالا داریم:

$$\begin{cases} a=bq+r \\ a=bq'+r' \end{cases} \Rightarrow bq+r=bq'+r' \Rightarrow b(q-q')=r'-r$$

$$\Rightarrow |b||q-q'|=|r-r'| \qquad (۲)$$

با توجه به اینکه: $r'<|b|$ و $۰\leq r$، پس: $|r-r'|<|b|$.
بنابراین تساوی (۲) به‌صورت زیر درمی‌آید:

$$|b||q-q'|=|r-r'|\Rightarrow |b||q-q'|<|b|\Rightarrow |q-q'|<۱$$

و چون q و q' اعداد صحیح‌اند، باید: $q=q'$ و در ادامه داریم: $r=a-bq=a-bq'=r'$. بنابراین r و q یکتا هستند.

نکته: با توجه به قضیهٔ تقسیم، خارج‌قسمت تقسیم عدد صحیح a بر عدد طبیعی b عبارت است از q که: $q=\left[\frac{a}{b}\right]$، زیرا:

$$a=bq+r\Rightarrow \frac{a}{b}=q+\frac{r}{b}$$

$$\Rightarrow \left[\frac{a}{b}\right]=\left[q+\frac{r}{b}\right]=q+\left[\frac{r}{b}\right]=q+۰=q, \left(۰\leq \frac{r}{b}<۱\right)$$

مسئلهٔ ۱. اگر $a=-۲۰$ و $b=۳$، خارج قسمت و باقی‌ماندهٔ تقسیم a را بر b پیدا کنید.

حل: ابتدا خارج‌قسمت را از نکتهٔ بالا پیدا می‌کنیم:

$$q=\left[\frac{a}{b}\right]=\left[-\frac{۲۰}{۳}\right]=-۷$$

و سپس باقی‌مانده را از فرمول $a=bq+r$ محاسبه می‌کنیم: $-۲۰=۳(-۷)+r\Rightarrow r=۱$.

مسئلهٔ ۲. در تقسیم عدد a بر عدد طبیعی b، باقی‌مانده ۱۷ و خارج‌قسمت ۲۵ است. اگر a مضرب ۶ باشد، کمترین مقدار ممکن برای a را به‌دست آورید.

حل: شکل مسئله را از قضیهٔ تقسیم می‌نویسیم:

$$a=bq+r\Rightarrow a=۲۵b+۱۷; \; ۰\leq ۱۷<b$$

بنابراین برای تعیین مقادیر a می‌توانیم مقادیر b را از نامساوی بالا به‌ترتیب قرار دهیم: $b=۱۸,۱۹,۲۰,\dots$. برای اینکه a کوچک‌ترین عدد مضرب ۶ باشد، کافی است قرار دهیم: $b=۱۹$ و از آنجا داریم: $a=۲۵(۱۹)+۱۷=۴۹۲$.

مسئلهٔ ۳. در تقسیم عدد a بر ۵۹ باقی‌مانده برابر ۱۵ است. اگر ۵۰ واحد به مقسوم اضافه کنیم، باقی‌مانده و خارج‌قسمت چه تغییری می‌کنند؟

حل: شکل مسئله را قبل و بعد از انجام تغییرات، از قضیهٔ تقسیم می‌نویسیم:

$$\begin{cases} a=59q+15 \\ a+50=59q+15+50=59q+65 \end{cases}$$

با توجه به اینکه ۶۵ نمی‌تواند باقی‌ماندهٔ تقسیم عدد a+۵۰ بر ۵۹ باشد، از عدد ۶۵، ۵۹ واحد کم می‌کنیم:

$$a+50=59q+65=\underbrace{59q+59}+6=59(q+1)+6=59q'+6$$

و چون: ۵۹>۶≥۰، پس تساوی بالا یعنی a+۵۰=۵۹q´+۶ می‌تواند شکلی از قضیهٔ تقسیم باشد. بنابراین خارج‌قسمت یک واحد اضافه شده و باقی‌مانده ۹ واحد کم شده است.

مسئلهٔ ۴. باقی‌ماندهٔ تقسیم a و b بر ۱۵ به‌ترتیب ۷ و ۴ است. باقی‌ماندهٔ تقسیم ۳a−۷b بر ۱۵ را به‌دست آورید.

حل:

$$\begin{cases} a=15q+7 \\ b=15q'+4 \end{cases} \Rightarrow 3a-7b=3(15q+7)-7(15q'+4)$$
$$=15(3q-7q')-7=15q''-7$$

تساوی ۳a−۷b=۱۵q˝−۷ نمی‌تواند باقی‌مانده را از قضیهٔ تقسیم به‌دست آورد، زیرا باقی‌مانده هیچ‌گاه منفی نیست. برای اینکه باقی‌مانده مثبت شود، به عدد ۷- مضارب ۱۵ را اضافه و کم می‌کنیم:

$$3a-7b=15q''-7=\underbrace{15q''-15}+15-7$$
$$=15(q''-1)+8=15q_1+8$$

پس باقی‌ماندهٔ ۳a−۷b بر ۱۵ برابر ۸ است.

مسئلهٔ ۵. در تقسیم a بر b باقی‌مانده ۶۵ و خارج‌قسمت ۱۷ است. حداکثر چند واحد می‌توانید به مقسوم‌علیه اضافه کنید بدون آنکه مقسوم و خارج‌قسمت تغییر کنند؟

حل: صورت مسئله را قبل و بعد از تغییرات به شکل قضیهٔ تقسیم می‌نویسیم:

$$\begin{cases} a=17b+65 \\ a=17(b+x)+r \end{cases}$$

اکنون باید بیشترین مقدار ممکن برای x را به‌دست آوریم. از اختلاف این دو تساوی داریم:

$$0=17x+r-65 \Rightarrow r=65-17x \overset{r\geq 0}{\Rightarrow} 65-17x\geq 0$$
$$\Rightarrow x\leq \frac{65}{18}$$

و بنابراین بیشترین مقدار x برابر است با: x=۳.

مسئلهٔ ۶. باقی‌ماندهٔ تقسیم a بر ۵ و ۳ به ترتیب برابر با ۴ و ۱ است. باقی‌مانده تقسیم a بر ۱۵ را به دست آورید.

حل: شکل قضیهٔ تقسیم را برای تقسیم a بر ۵ و ۳ می‌نویسیم:

$$\begin{cases} a=5q+4 \Rightarrow 3a=15q+12 \\ a=3q'+1 \Rightarrow 5a=15q'+5 \end{cases} \Rightarrow 5a-3a=15(q'-q)-7$$
$$\Rightarrow 2a=15q''-7$$

برای رسیدن به جواب با کمک قضیهٔ تقسیم، باید در تساوی بالا ۲a را به a تبدیل کنیم.

برای این‌کار ابتدا ۷- را به یک عدد زوج تبدیل می‌کنیم:

$$2a=15q''-7=15q''-15+8=15(q''-1)+8$$
$$\Rightarrow 2a=15q_1+8$$

در تساوی بالا، ۲a و ۸ زوج هستند، پس $15q_1$ و در نتیجه q_1 باید زوج باشد:

$$2a=15(2k)+8=30k+8 \overset{\div 2}{\Rightarrow} a=15k+4$$

یعنی باقی‌ماندهٔ تقسیم a بر ۱۵، ۴ است.

مسئلهٔ ۷. در تقسیم عدد طبیعی سه رقمی a بر عدد طبیعی b، خارج قسمت ۲۱ و باقی‌مانده ۳۷ است. چند عضو از مجموعه جواب‌های a مضرب ۵ است؟

حل: مسئله را به شکل قضیهٔ تقسیم می‌نویسیم:

a=۲۱b+۳۷; ۳۷<b

با توجه به اینکه a<۱۰۰۰ داریم:

$$21b+37<1000 \Rightarrow 21b<963 \Rightarrow b<\frac{963}{21} \Rightarrow b<45/6$$

پس: ۳۷<b<۴۵/۶. اکنون باید تمام مقادیر ممکن برای b را در تساوی a=۲۱b+۳۷ قرار داد تا همهٔ اعداد مضرب ۵ برای a به‌دست آید. البته با توجه به اینکه: a=(۲۰+۱)b+۳۷، بنابراین b باید به شکل ۵k+۳ باشد (رقم یکان a باید مضرب ۵ باشد) و از نامساوی ۳۷<b<۴۵/۶ فقط دو عدد ۳۸ و ۴۳ به شکل ۵k+۳ هستند.

هوشنگ شرقی

از روابط طولی در دایره‌ها بیشتر بدانیم!

اشاره

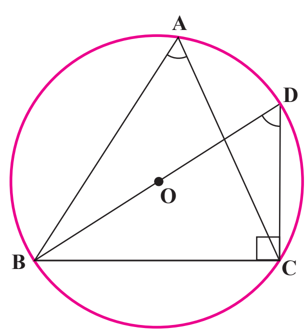
در کتاب درسـی هندسـهٔ ۲ به تعدادی از رابطه‌های طولی در دایره اشـاره شـده است که مربوط به طول‌های قطعه‌ها و مماس‌ها در دایره می‌شوند. اما برخی رابطه‌های طولی دیگر در ارتباط با مثلث‌ها در دایره وجود دارند که به‌طور غیرمستقیم به بعضی از آن‌ها اشاره‌هایی شده است. چون آگاهی بیشتر از این رابطه‌ها، در حل بسیاری از مسائل به ما یاری می‌رساند، بر آن شدیم که به این رابطه‌ها اشاره‌هایی داشته باشیم. توصیه می‌کنیم که در حل تمرین‌های متن، قدم‌به‌قدم با ما همراه شوید تا در انتهای کار، به نتیجهٔ مطلوب مقاله برسید.

الف) شعاع دایرهٔ محیطی مثلث

می‌دانیم که از سـه رأس هر مثلث، یک و فقط یک دایره می‌گذرد، به‌طوری‌که مثلث در آن محاط شـود و آن را دایرهٔ محیطی مثلث می‌گوییم. (**سؤال:** مرکز این دایره چگونه به‌دسـت می‌آید؟) حال اگر قطر گذرنده از یک رأس دلخواه (مثلاً B) را رسم کنیم (قطر BD) و D را به C وصل کنیم، مطابق شکل داریم:

(چرا؟) $\hat{D}=\hat{A}$ و $\hat{C}=90^\circ \Rightarrow \Delta BDC: \sin D=\frac{BC}{BD}$ (چرا؟)

$$\Rightarrow \sin A=\frac{a}{2R}\Rightarrow a=2R\sin A$$



یعنی در مثلث ABC، طول ضلع BC(a) برابر است با حاصل‌ضرب قطر دایرهٔ محیطی مثلث در سینوس زاویهٔ روبه‌رو به این ضلع، و این اسـتدلال قابل تعمیم به همهٔ اضلاع مثلث نیز هست؛ یعنی:

$$b=2R\sin B,\ c=2R\sin C$$

و از آنجا نتیجه می‌شود:

$$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}=2R$$

سؤال:

اگر زاویهٔ A منفرجه باشد، آیا استدلال فوق دچار اشکال نمی‌شود؟ با رسم یک شکل مشابه و استدلالی دیگر نشان دهید که در این حالت هم همین حکم برقرار است.

رابطـهٔ بالا که بـه «قضیهٔ سـینوس‌ها» هم معروف اسـت، بین اضلاع و زاویه‌های یک مثلث رابطه‌ای مستقیم برقرار می‌سازد.

● **مثال ۱.** در مثلث ABC داریم: $\sin^{۲} A = \sin^{۲} B + \sin^{۲} C$. این مثلث چه نوع است؟

حل: به کمک قضیهٔ سینوس‌ها داریم:

$$\sin A = \frac{a}{۲R}, \sin B = \frac{b}{۲R}, \sin C = \frac{c}{۲R}$$

و با توجه به فرض مسئله نتیجه می‌شود:

$$\frac{a^{۲}}{۴R^{۲}} = \frac{b^{۲}}{۴R^{۲}} + \frac{c^{۲}}{۴R^{۲}} \Rightarrow a^{۲} = b^{۲} + c^{۲}$$

یعنی مثلث در رأس A قائم‌الزاویه است.

● **مثال ۲.** در مثلث ABC، a=۸ و $\hat{A} = ۶۰^{\circ}$ مساحت دایرهٔ محیطی مثلث چه‌قدر است؟

حل:

$$۲R = \frac{a}{\sin A} = \frac{۸}{\sin ۶۰^{\circ}} = \frac{۸}{\frac{\sqrt{۳}}{۲}} = \frac{۱۶}{\sqrt{۳}} \Rightarrow R = \frac{۸}{\sqrt{۳}}$$

$$S = \pi R^{۲} = \frac{۶۴\pi}{۳}$$

■ **تمرین ۱.** اگر در مثلث ABC بین BC=a و AC=b رابطهٔ a=۲bcosC برقرار باشد، نشان دهید که مثلث در رأس A متساوی‌الساقین است. (راهنمایی: a و b را به sinA و sinB و سمت راست رابطهٔ حاصل را به مجموع تبدیل کنید.)

■ **تمرین ۲.** می‌دانیم که مساحت هر مثلث برابر است با نصف حاصل‌ضرب هر دو ضلع مثلث در سینوس زاویهٔ بین آن‌ها. با توجه به این موضوع نشان دهید شعاع دایرهٔ محیطی هر مثلث از دستور $R = \frac{abc}{۴S}$ نیز به‌دست می‌آید.

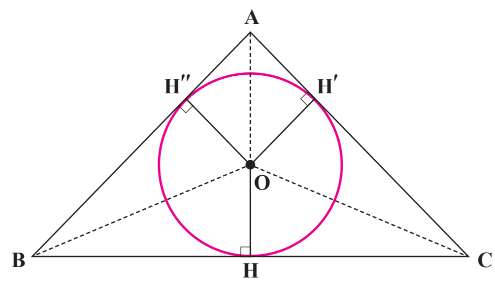
■ **تمرین ۳.** به کمک دستور تمرین ۲، شعاع دایرهٔ محیطی مثلث متساوی‌الاضلاع به ضلع a را برحسب a به‌دست آورید.

ب) دایره‌های محاطی مثلث و روابط طولی آن‌ها

۱. دایرهٔ محاطی داخلی

می‌دانیم که در هر مثلث، یک و تنها یک دایره قابل محاط شدن است و این دایره بر اضلاع مثلث در سه نقطه مماس می‌شود. (**سؤال:** مرکز این دایره چه نقطه‌ای است؟) از آنجا که شعاع دایره بر مماس بر آن در نقطهٔ تماس عمود می‌شود، لذا در شکل بالا داریم:

$$OH = OH' = OH'' = r$$



برای محاسبهٔ اندازهٔ شعاع این دایره، از O به A، B و C وصل می‌کنیم. به کمک مساحت‌ها داریم:

$$S_{ABC} = S_{AOB} + S_{AOC} + S_{BOC}$$

$$\Rightarrow S = \frac{۱}{۲}OH''.AB + \frac{۱}{۲}OH'.AC + \frac{۱}{۲}OH.BC$$

$$= \frac{۱}{۲}c.r + \frac{۱}{۲}b.r + \frac{۱}{۲}a.r = \frac{۱}{۲}(a+b+c)r$$

و با فرض a+b+c=۲P نتیجه می‌شود: S=Pr و یا $r = \frac{S}{P}$.

یعنی: «اندازهٔ شعاع دایرهٔ محاطی داخلی هر مثلث برابر است با حاصل تقسیم مساحت مثلث بر نصف محیط آن.»

● **مثال ۳.** طول شعاع دایرهٔ محاطی داخلی مثلث قائم‌الزاویه‌ای را بیابید که طول‌های اضلاع زاویهٔ قائمهٔ آن ۳ و ۴ سانتی‌متر باشد.

حل: b=۳ و c=۴. به کمک قضیهٔ فیثاغورس $(a^{۲} = b^{۲} + c^{۲})$ وتر مثلث را به‌دست می‌آوریم: a=۵ بنابراین:

$$۲P = a + b + c = ۱۲, \ P = ۶$$

$$S = \frac{bc}{۲} = ۶ \Rightarrow r = \frac{S}{P} = ۱$$

● **مثال ۴.** طول شعاع دایرهٔ محاطی داخلی مثلث متساوی‌الاضلاع به ضلع a را برحسب a به‌دست آورید.

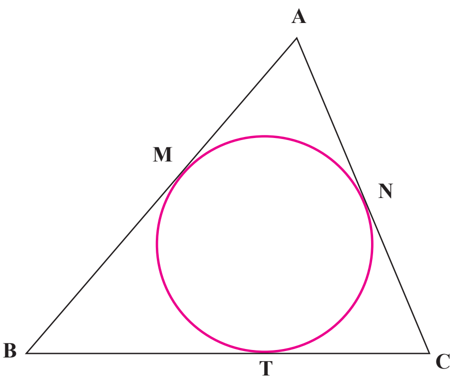
حل: می‌دانیم: $S = \frac{\sqrt{۳}}{۴}a^{۲}$، $۲P = a + a + a$ و $P = \frac{۳a}{۲}$. در نتیجه:

$$r = \frac{S}{P} = \frac{\frac{\sqrt{۳}}{۴}a^{۲}}{\frac{۳a}{۲}} = \frac{\sqrt{۳}}{۶}a$$

این نتیجه را به روش هندسی هم می‌توان به دست آورد (با رسم شکل امتحان کنید)، اما مسلماً این روش آسان‌تر است.

■ **تمرین ۴.** در مثلث متساوی‌الساقینی که طول قاعدهٔ آن ۱۲ واحد و طول ساق‌های آن ۱۰ واحد است، طول شعاع دایرهٔ محاطی را به‌دست آورید.

در ادامه یک ویژگی مهم دیگر دایرهٔ محاطی داخلی مثلث را شرح می‌دهیم. با توجه به ویژگی برابری مماس‌هایی که از هر نقطهٔ خارج از دایره بر آن رسم می‌شوند، در شکل زیر داریم:



$$AM = AN,\ CN = CT,\ BT = BM$$

با جمع کردن طرفین این تساوی‌ها به ترتیب زیر نتیجه می‌شود:

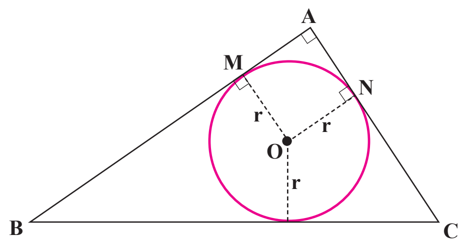
$$AN+CN+BM = AM+CT+BT$$
$$\Rightarrow AC+BM = AM+BC \Rightarrow AM = AC+BM-BC$$
$$= AC+AB-AM-BC \Rightarrow ۲AM = AB+AC-BC$$
$$\Rightarrow ۲AM = (AB+AC+BC)-۲BC = ۲P-۲a$$
$$\Rightarrow AM = AN = P-a$$

نتیجه: در هر مثلث، طول‌های قطعات مماس بر دایرهٔ محاطی مثلث برابر است با نصف محیط مثلث منهای ضلع مقابل به هر قطعه؛ یعنی داریم:

$$AM = AN = P-a, CN = CT = P-c, BM = BT = P-b$$

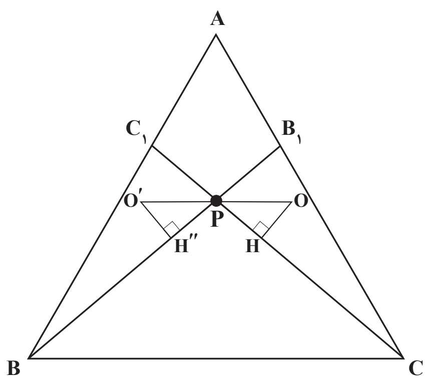
● **مثال ۵.** ثابت کنید مساحت هر مثلث قائم‌الزاویه با وتر a و نصف محیط p برابر است با: S=P(P-a).

حل: مطابق شکل، دایرهٔ C(O,r) در مثلث قائم‌الزاویهٔ ABC محاط شده است. چون داریم: $\hat{A} = \hat{M} = \hat{N} = ۹۰^\circ$ و AM=AN و OM=ON، پس ANOM مربع است و ON=AN. بنابراین: r=p-a و $\frac{S}{p} = p-a$ و از آنجا: S=P(P-a).



● **مثال ۶.** نقطهٔ P را درون مثلث ABC اختیار می‌کنیم. خطوط راست BP و CP اضلاع روبه‌رو را به ترتیب در B_1 و C_1 قطع می‌کنند. اگر بدانیم هم مساحت‌ها و هم محیط‌های دو مثلث PBC_1 و PCB_1 با هم برابرند، ثابت کنید P روی نیمساز درونی A قرار دارد (المپیاد ریاضی ایران- ۱۳۷۲).

حل: اگر محیط و مساحت مثلث PCB_1 را با ۲P و S و محیط و مساحت مثلث PBC_1 را با ´۲P و ´S نمایش دهیم، طبق فرض: S=S´ و P=P´.



در نتیجه: $\frac{S}{P} = \frac{S'}{P'}$ و لذا: r=r´. با فرض اینکه O مرکز دایرهٔ محاطی مثلث PB_1C و O´ مرکز دایرهٔ محاطی داخلی مثلث PC_1B باشد، چون O و O´ نقطهٔ همرسی نیمسازهای زوایای داخلی دو مثلث‌اند، پس PO و PO´ نیمسازهای دو زاویهٔ متقابل به رأس و روی یک خط هستند. لذا: ∠OPH=∠O´PH´ و چون r=r´، پس: OH=O´H´. در نتیجه مثلث‌های OHP و O´H´P

هم‌نهشــت‌اند (زض‌ز) و: PH=PH´. اما طبق آنچه که در مــورد طول‌های مماس‌ها گفتیم (بــه دایره‌های محاطی مثلث‌های $PBC_۱$ و $PCB_۱$ که رســم نشده‌اند و در نقاط H و H´ بر PC و PB مماس هستند، دقت کنید) داریم:

$$P-B_۱C=P'-BC_۱,\ P=P'\Rightarrow B_۱C=BC_۱$$

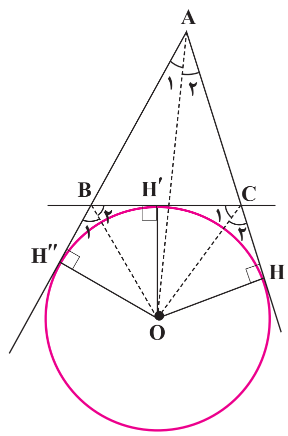
حــال اگــر ارتفاع‌هــای رأس P دو مثلــث را h و h´ بنامیم، نتیجه می‌شود:

$$S=S'\Rightarrow \frac{۱}{۲}B_۱C.h=\frac{۱}{۲}BC_۱.h'\Rightarrow h=h'$$

یعنی P از AB و AC به یک فاصله و در نتیجه روی نیم‌ساز زاویهٔ A است.

۲. دایرهٔ محاطی خارجی

در هــر مثلث، نیم‌ســازهای هر دو زاویــهٔ خارجی و نیم‌ســاز زاویهٔ داخلی سوم، در یک نقطه همرس‌اند. مثلاً در شــکل روبه‌رو، نیم‌ســاز زاویهٔ A و دو نیم‌ساز زوایای خارجــی B و C در یک نقطه همرس‌اند (چرا؟) با توجه به ویژگی نیم‌ســازها (هر نقطه روی نیم‌ساز زاویه، از دو ضلع زاویه به یک فاصله است)، اگر نقطهٔ همرسی این سه نیم‌ساز O باشد، داریم: OH=OH´ و OH´=OH˝ و لذا: OH=OH´=OH˝.



پس دایره‌ای به مرکز O و به شعاع OH، در نقاط H و H´ و H˝ بــر امتدادهــای AB و AC و بر BC مماس است. این دایره را دایرهٔ محاطی خارجی رأس A می‌نامیم (این دایره بر BC مماس است و روبه‌رو به رأس A است) و شــعاع آن را با r_a نمایش می‌دهیم. برای محاسبهٔ r_a به کمک مساحت‌ها می‌نویسیم:

$$S_{ABC}=S_{OAB}+S_{OAC}-S_{OBC}$$

با تکمیل راه حل، درستی رابطهٔ زیر را نتیجه بگیرید:

$$r_a=\frac{S}{P-a}$$

به طریقهٔ مشابه داریم: $r_b=\frac{S}{P-b}$ و $r_c=\frac{S}{P-c}$

■ **تمریــن ۵.** دوایــر محاطی خارجــی متناظر با رأس‌های A، B و C را در یک شکل رسم کنید.

ویژگی مهم دیگری نیز در شکل فوق قابل تشخیص است. با توجه به برابری مماس‌ها داریم:

$$\left.\begin{array}{l}AH=AC+CH, CH=CH'\\ AH''=AB+BH'', BH''=BH'\end{array}\right\}$$

$$\Rightarrow\begin{cases}AH=AC+CH'\\ AH''=AB+BH'\end{cases}$$

$$AH=AH''\Rightarrow ۲AH=AB+AC+BC=۲P$$

$$\Rightarrow AH=AH''=P$$

یعنی: «مماس‌های رســم شــده بر دایــرهٔ محاطی خارجی هر رأس برابر با نصف محیط مثلث است.»

نتیجه: با تغییر مکان H´ روی کمان HH˝ و تغییر طــول BC و جای B و C، محیــط مثلث ABC تغییر نمی‌کند و ثابت می‌ماند. (چرا؟)

پرسش‌های پیکارجو!

همهٔ ســه‌تایی‌های صحیح (x,y,z) که در معادلهٔ $۲^x+۲^y=۲^z$ صدق می‌کنند، روی کدام صفحهٔ زیر واقع‌اند؟

الف) x+y=z ب) x+y=۲z-۱ ج) x+y=۲z-۲

د) x+۲y=۲z-۱ هـ) x+۲y=۳z-۳